INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS EL MANAR

Devoir surveillé n° 2 d'ALGEBRE

Classes: 1 PT et 1 PC — 28 - 2 - 2017

Nombre de pages : 1 — Durée : 1H

Exercice 1 (4,5 pts)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $(1,\ X,\ X^2)$, on considère les polynômes

$$P = -X^2 - 2X + 1, \quad Q = 5X + 2 \ \text{ et } R = -1.$$

1pt + 1pt 1. Montrer que $B = (P,\ Q,\ R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

0,5 pt x 3 2. Déterminer les coordonnées de 1, X et X^2 dans la base B.

1 pt 3. En déduire les coordonnées du polynôme $-X^2 + X + 1$ dans la base B.

Exercice 2 (8 pts)

On note $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P'(1) = 0\}$.

1pt 1. a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

1 pt b) Montrer que $F = \{(X-1)^2 Q,\ Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$.

1pt + 1pt c) Montrer que $B = ((X-1)^2,\ X(X-1)^2)$ est une base de F.

1 pt En déduire la dimension de F.

2. On pose $H = vect(1,\ X-1)$.

0,5pt + 0,5pt a) Montrer que $\dim H = 2$.

2pt b) Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus H$.

Exercice 3 (9,5 pts).

Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère les fonctions g, h, k et l définies par :

$$g(x) = e^x,\ h(x) = 1,\ \ k(x) = e^{-x} \text{ et } \ l(x) = e^{-2x}.$$

On note $E = vect(g,\ h,\ k, l)$ et φ l'application définie sur E par : $\varphi(f) = f'' + f' - 2f$.

1pt + 0,5pt 1. a) Montrer que $B = (g,\ h,\ k, l)$ est une base de E.

0,5 pt b) En déduire la dimension de E.

0,5 pt 2. a) Vérifier que φ est linéaire.

0,5 pt x 4 b) Vérifier que $\varphi(g) = 0$, $\varphi(h) = -2h$, $\varphi(k) = -2k$ et $\varphi(l) = 0$.

c) Soit f de coordonnées (a, b, c, d) dans la base B.

0,5 pt Montrer que $\varphi(f) = -2bh - 2ck$.

0,5 pt En déduire que φ est un endomorphisme de E.

0,5 pt x 3 d) Montrer que $\ker\varphi = vect(g,\ l)$ et déterminer sa dimension.

0,5 pt x 3 3. a) Montrer que $\ker(\varphi + 2Id_E) = vect(h,\ k)$ et déterminer sa dimension.

1 b) Monter que $E = \ker\varphi \oplus \ker(\varphi + 2Id_E)$.

Correction du devoir surveillé n°2 d'Algèbre 2016-2017

Exercice n°1 : $\boxed{4,5\text{pts}}$

$\mathbb{R}_2[X] = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 ;\ a_k \in \mathbb{R}\ 0 \leq k \leq 2 \right\}$

muni de sa base canonique $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$.

→ $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$.

Soit $p(X) = -X^2 - 2X + 1$, $\varphi(X) = 5X + 2$, $R(X) = -1$

1°) $B = (p, \varphi, R)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ de degrés deux à deux distincts.

Donc B est une famille libre dans $\mathbb{R}_2[X]$. $\boxed{1\text{pt}}$

Comme $\mathrm{Card}(B) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, alors B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. $\boxed{1\text{pt}}$

2°) • $M_B(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c'àd $1 = 0.p + 0.\varphi + (-1)R$. $\boxed{0,5\text{pt}}$

• $M_B(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ c'àd $X = 0.p + \frac{1}{5}\varphi + \frac{2}{5}R$. $\boxed{0,5\text{pt}}$

• $M_B(X^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ c'àd $X^2 = -p - \frac{2}{5}\varphi - \frac{4}{5}R$ $\boxed{0,5\text{pt}}$

2

3] $\mathcal{M}_B(-X^2+X+1) = \mathcal{M}_B(-X^2) + \mathcal{M}_B(X) + \mathcal{M}_B(1)$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1pt}$

C'à-d $-X^2+X+1 = p(X) + \frac{3}{5}\varphi(X) + \frac{1}{5}R(X)$.

Exercice n°2 : $\boxed{8pts}$

$F = \{ p \in \mathbb{R}_3[X] ; p(1) = p'(1) = 0 \}$.

1/ a°/ . Le polynôme nul $p(X) = 0$ vérifie $p(1) = p'(1) = 0$

Donc $p = 0 \in F \ (\neq \emptyset)$.

. Soit $p, q \in F$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = 0$

$(\alpha p + \beta q)'(1) = \alpha p'(1) + \beta q'(1) = 0$.

Donc $\alpha p + \beta q \in F$. $\boxed{1pt}$

Par suite F est un s.e.v de $\mathbb{R}_3[X]$.

b°/ $p \in F \iff p \in \mathbb{R}_3[X]$ et $p(1) = p'(1) = 0$

$\iff p(X) = (X-1)^2 \varphi(X)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}_1[X]$

Donc $F = \{ p = (X-1)^2 \varphi(X) ; \varphi \in \mathbb{R}_1[X] \}$ $\boxed{1pt}$

c] On a $F = \{ p(X) = (X-1)^2 \varphi(X) \; ; \; \varphi \in \mathbb{R}_1[X] \}$ ③

$= \{ p(X) = (X-1)^2 (\alpha X + \beta) \; ; \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$= \{ p(X) = \beta (X-1)^2 + \alpha X (X-1)^2 \; ; \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$= \mathrm{Vect}\left((X-1)^2, X(X-1)^2 \right)$. $\boxed{1pt}$

• $\left((X-1)^2, X(X-1)^2 \right)$ est une famille libre, donc $\boxed{1pt}$ base de F

Ainsi $\dim F = 2$. $\boxed{1pt}$

2°] On pose $H = \mathrm{Vect}(1, X-1)$

a] $\alpha + \beta(X-1) = 0 \iff \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$

Donc $(1, X-1)$ est libre. $\boxed{0,5pt}$

Ainsi $(1, X-1)$ est une base de $H \Longrightarrow \dim H = 2$ $\boxed{0,5pt}$

b°] Soit $p \in F \cap H$.

Alors $p(X) = \alpha (X-1)^2 + \beta X (X-1)^2 = \lambda + \mu (X-1)$

avec $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Donc $\alpha (X-1)^2 + \beta X (X-1)^2 - \lambda - \mu (X-1) = 0$

Comme $(1, X-1, (X-1)^2, X(X-1)^2)$ est libre,

alors $\alpha = \beta = \lambda = \mu = 0$. Ainsi $p = 0$.

$\Longrightarrow H \cap F = \{0\}$.

- $\dim H + \dim F = 2 + 2 = \dim \mathbb{R}_3[X]$.

<u>Conclusion</u> :

$$\left\{\begin{array}{l}\dim H + \dim F = \dim \mathbb{R}_3[X] \\ \text{et} \\ H \cap F = \{0\}\end{array}\right. \Longleftrightarrow F \oplus H = \mathbb{R}_3[X].$$

$\boxed{2\text{pts}}$

<u>Exercice n°3</u> : $\boxed{9{,}5\text{pts}}$

On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = e^{x},\ h(x) = 1,\ k(x) = e^{-x} \text{ et } l(x) = e^{-2x}$$

On note $E = \mathrm{Vect}(g, h, k, l)$.

et soit $\varphi(f) = f'' + f' - 2f$; $f \in E$.

1] a] Soit $\alpha, \beta, \nu, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\alpha g + \beta h + \nu k + \mu l = 0$

$\alpha g(x) + \beta h(x) + \nu k(x) + \mu l(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \alpha e^{x} + \beta + \nu e^{-x} + \mu e^{-2x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow e^{x}\left(\alpha + \beta e^{-x} + \nu e^{-2x} + \mu e^{-3x}\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \alpha + \underbrace{\beta e^{-x} + \nu e^{-2x} + \mu e^{-3x}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} = 0$$

Donc $\boxed{\alpha = 0}$

$\bullet\ \beta + \underbrace{\nu e^{-x} + \mu e^{-2x}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

Il reste $\nu e^{-x} + \mu e^{-2x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow e^{-x}(\nu + \mu e^{-x}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \nu + \underbrace{\mu e^{-x}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} = 0 \Rightarrow \boxed{\nu = 0}$

Il reste $\mu e^{-2x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $\boxed{\mu = 0}$

$\boxed{1 pt}$

Par suite la famille $B = (g, h, k, \ell)$ est libre dans E. De plus B est génératrice de E $\boxed{0,5 pt}$.

b°) Comme $B = (g, h, k, \ell)$ est une base de E, alors

$\dim E = 4$. $\boxed{0,5 pt}$

2° a) Soit $f_1, f_2 \in E$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha f_1 + \beta f_2) &= (\alpha f_1 + \beta f_2)'' + (\alpha f_1 + \beta f_2)' - 2(\alpha f_1 + \beta f_2) \\ &= \alpha(f_1'' + f_1' - 2f_1) + \beta(f_2'' + f_2' - 2f_2) \\ &= \alpha \varphi(f_1) + \beta \varphi(f_2).\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire. $\boxed{0,5 pt}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$

- $\varphi(g)(x) = g''(x) + g'(x) - 2g(x)$

$= e^{x} + e^{x} - 2e^{x} = 0$.

Donc $\boxed{\varphi(g) = 0}$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

- $\varphi(h)(x) = h''(x) + h'(x) - 2h(x)$

$= 0 + 0 - 2 = -2$

Donc $\boxed{\varphi(h) = -2h}$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

- $\varphi(k)(x) = k''(x) + k'(x) - 2k(x)$

$= e^{-x} - e^{-x} - 2e^{-x} = -2e^{-x}$

$= -2k(x)$

Donc $\boxed{\varphi(k) = -2k}$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

- $\varphi(\ell)(x) = \ell''(x) + \ell'(x) - 2\ell(x)$

$= 4e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2e^{-2x} = 0$

Donc $\boxed{\varphi(\ell) = 0}$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

c) Soit $f = ag + bh + ck + d\ell$ avec

$\mathcal{M}_B(f) = (a, b, c, d)$.

$\varphi(f) = a\varphi(g) + b\varphi(h) + c\varphi(k) + d\varphi(\ell)$

$= -2bh - 2ck$. $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

Donc si $f = ag + bh + ck + dl \in E$, alors

$\varphi(f) = -2bh - 2ck \in E$. $\boxed{0{,}5\ pt}$

Ainsi $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ (endomorphisme de E).

d) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{f \in E ; \varphi(f) = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\})$.

Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Alors $f \in E$ et $\varphi(f) = 0$

Donc $\exists! (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tq $f = ag + bh + ck + dl$

et $\varphi(f) = 0$

$\Longrightarrow -2bh - 2ck = 0$

$\Longrightarrow -2b - 2c\,e^{-x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

qd $x \longmapsto +\infty$, on obtient $b = 0$.

Il reste $-2c\,e^{-x} = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow c = 0$.

Ainsi $f = ag + dl$.

Ce qui implique $\boxed{\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathrm{Vect}(g, l)}$ $\boxed{0{,}5\ pt}$

Réciproquement si $f \in \mathrm{Vect}(g, l)$ alors d'après 2°b) $\varphi(f) = 0$ ce qui implique $\boxed{\mathrm{Vect}(g,l) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi}$

Par suite $\boxed{\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Vect}(g, l)}$ $\boxed{0{,}5\ pt}$

• La famille $\{g, l\} \subset \{g, h, k, l\}$ libre, alors $\{g, l\}$ est libre

Donc $\{g, l\}$ est une base de $\ker \varphi$ et $\boxed{\dim \ker \varphi = 2}$ $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

3-a) $\ker(\varphi + 2 Id_E) = \{f \in E ; \varphi(f) + 2f = 0\}$.

$f \in \ker(\varphi + 2Id_E) \Leftrightarrow f = ag + bh + ck + dl$ et $\varphi(f) + 2f = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{-2bh} \cancel{-2ck} + 2ag + \cancel{2bh} + \cancel{2ck} + 2dl =$

$\Leftrightarrow 2ag + 2dl = 0$

$\Leftrightarrow 2a e^{x} + 2d e^{-2x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

~~qd x→+∞~~ $\Leftrightarrow 2a + 2d e^{-3x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

qd $x \mapsto +\infty$, on obtient $a = 0$.

Il reste $2d e^{-2x} = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow d = 0$.

Ainsi $f = bh + ck$

Ce qui implique $\boxed{\ker(\varphi + 2Id_E) \subset Vect(h, k)}$. $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

• Soit $f \in Vect(h, k)$.

Alors $f = bh + ck$ avec $b, c \in \mathbb{R}$.

$(\varphi + 2Id_E)(f) = \varphi(f) + 2f = -2bh - 2ck + 2bh + 2ck$
$= 0$

Donc $\boxed{Vect(h, k) \subset \ker(\varphi + 2Id_E)}$ $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

Par suite $\boxed{\ker(\varphi + 2Id_E) = \mathrm{Vect}(h, k)}$

. La famille $\{h, k\} \subset \{g, h, k, l\}$ qui est libre

alors $\{h, k\}$ est libre

Donc $\{h, k\}$ est une base de $\ker(\varphi + 2Id_E)$

et $\boxed{\dim \ker(\varphi + 2Id_E) = 2}$. $\boxed{0{,}5\,pt}$

b/ Soit $f \in \ker(\varphi) \cap \ker(\varphi + 2Id_E)$.

Alors $\exists! (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tq $f = ag + bl$
$= ch + dk$

$\Longrightarrow ag + bl - ch - dk = 0$

Comme $\{g, l, h, k\}$ est libre alors $a = b = c = d = 0$.

Donc $f = 0 \Longrightarrow \boxed{\ker(\varphi) \cap \ker(\varphi + 2Id_E) = \{0\}}$.

. $\dim \ker(\varphi) + \dim \ker(\varphi + 2Id_E) = 4 = \dim E$.

Par suite $\boxed{E = \ker(\varphi) \oplus \ker(\varphi + 2Id_E)}$ $\boxed{1\,pt}$