Devoir Surveillé $N^\circ 1$ D'Algèbre

1PC et 1PT *A.U : 2016/2017*

Exercice 1 6 pts

2 pt 1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

. pour $n=0$: 0,5 pt
. Récurrence : 1,5 pt

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(cos(\frac{x}{2^k})) = \ln(\frac{sin(2x)}{2^{n+1}\, sin(\frac{x}{2^n})}), \quad x \in]\,0, \frac{\pi}{2}\,[.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2,5 pt (a) Calculer

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k}_{1\,pt} \text{ et } \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, C_n^k}_{1{,}5\,pt = \underset{n \geq 2}{1\,pt} + \underset{n=1}{0{,}5\,pt}}.$$

(b) En déduire $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2\, C_n^k}$. 1,5 pt = $\underset{n \geq 2}{1\,pt}$ + $\underset{n=1}{0{,}5\,pt}$

Exercice 2 9 pts

1. Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

2 pt (a) Déterminer $\underbrace{f^{-1}(\{\frac{4}{5}\})}_{1\,pt}$ et $\underbrace{f^{-1}(\{2\})}_{1\,pt}$.

1 pt (b) En déduire que f n'est ni $\underbrace{\text{injective}}_{0{,}5\,pt}$ ni $\underbrace{\text{surjective}}_{0{,}5\,pt}$.

2. Soit $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ l'application définie par :

$$g(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

3 pt (a) Soit $\alpha \in [-1, 1]$, résoudre l'équation $\alpha x^2 - 2x + \alpha = 0$ et montrer qu'elle admet une racine dans $[-1, 1]$.

0,5 pt (b) En déduire que g est surjective.

1 pt (c) Montrer que $\forall\, (x, x') \in [-1, 1]^2$

$$g(x) = g(x') \;\Rightarrow\; (x - x')(1 - xx') = 0\,.$$

1 + 0,5 pt (d) En déduire que g est injective et conclure.

Exercice 3 5 pts

On définit sur $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ la relation suivante :

$$(n, m)\, \mathcal{R}\, (p, q) \;\Leftrightarrow\; np > 0 \text{ et } mq > 0\,.$$

1 Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. 1 pt + 1 pt + 1 pt

2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 1)$. 2 pt

PT1_PC1. **Corrigé du DS1**

Ex1 (1) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(0,5 pt) • Pour $n=0$, on a $\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\cos \frac{x}{2^k}\right) = \ln(\cos x)$

et $\ln \dfrac{\sin 2x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^n}} = \ln \dfrac{\sin 2x}{2 \sin x} = \ln(\cos x)$

• Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait
$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\cos \frac{x}{2^k}\right) = \ln\left(\dfrac{\sin 2x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^n}}\right)$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \ln\left(\cos \frac{x}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\cos \frac{x}{2^k}\right) + \ln\left(\cos \frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sin 2x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^n}}\right) + \ln\left(\cos \frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sin 2x \times \cos \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+1} \cdot \sin \frac{2x}{2^{n+1}}}\right) = \ln\left(\frac{\sin 2x \times \cos \frac{x}{2^{n+1}}}{2^{n+2} \sin \frac{x}{2^{n+1}} \times \cos \frac{x}{2^{n+1}}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sin 2x}{2^{n+2} \sin \frac{x}{2^{n+1}}}\right).$$

(1,5 pt) Ceci montre par récurrence sur n la propriété souhaitée.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On considère la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^n$.
Par la formule du binôme, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

En dérivant f, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k x^{k-1}$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k = f'(1) = n\, 2^{n-1}. \quad \boxed{1\,pt}$$

. En dérivant deux fois f, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k x^{k-2}, \quad \text{avec } (n \geq 2).$$

Donc pour $x = 1$, on a :

$$n(n-1)\, 2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k \quad \boxed{1\,pt}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k = n(n-1)\, 2^{n-2} \text{ lorsque } n \geq 2.$$

$\boxed{0{,}5\,pt}$. Il est clair que si $n=1$ alors $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k = 0$

(b) On a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k + \sum_{k=0}^{n} k C_n^k$$

$$= \begin{cases} 0 + 1, & \text{si } n=1 \\ n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = \begin{cases} 1, & \text{si } n=1 \\ n(n+1)2^{n-2}, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\boxed{1{,}5_{\,pt} = 0{,}5_{\,n=1} + 1_{\,n\geq 2}}$$

Ex2. (1) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

a) $f^{-1}\left(\left\{\frac{4}{5}\right\}\right) = \left\{x \in \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{4}{5}\right\}$

On a : $f(x) = \frac{4}{5} \iff 10x = 4x^2 + 4$
$\iff 4x^2 - 10x + 4 = 0$
$\iff 2x^2 - 5x + 2 = 0$

cette équation a deux solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Ainsi $f^{-1}\left(\left\{\frac{4}{5}\right\}\right) = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} \subset \mathbb{Q}$. $\boxed{1\,pt}$

On a $f^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{Q},\ f(x) = 2\}$

$x \in f^{-1}(\{2\}) \iff x \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{2x}{1+x^2} = 2$
$\iff x \in \mathbb{Q}$ et $x^2 - x + 1 = 0$

Comme le discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$
les solutions de l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ sont dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
Donc $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$. $\boxed{1\,pt}$

b) • f n'est pas injective car on a $2 \neq \frac{1}{2}$
mais $f(2) = \frac{4}{5} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{0{,}5\,pt}$

• f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par f. $\boxed{0{,}5\,pt}$

(2) a) Soit $\alpha \in [-1, 1]$, résoudre l'éq $\alpha x^2 - 2x + \alpha = 0$

(i) si $\alpha = 0$ alors l'éq s'écrit $-2x = 0$
l'unique solution est $\boxed{x = 0} \in [-1, 1]$
$\boxed{0{,}5\,pt}$

• Dans ce cas l'éq admet une racine dans $[-1,1]$ $\boxed{0{,}5\,pt}$

(ii) si $\alpha \neq 0$, $\Delta = 4 - 4\alpha^2 = 4(1-\alpha^2)$

* si $\alpha \in \{-1, 1\}$ alors $\Delta = 0$, il y a une seule racine (double) : $x_0 = \frac{1}{\alpha} \in \{-1, 1\} \Rightarrow x_0 \in [-1, 1]$

$\boxed{0,5pt} + \boxed{0,5pt}$

* si $\alpha \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ alors $\Delta \neq 0$ et $\Delta > 0$ il y a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha} \quad \boxed{0,5pt}$$

Montrons que l'une des racines est dans $[-1, 1]$.

on voit que $x_1 \times x_2 = \frac{(1-\sqrt{1-\alpha^2})(1+\sqrt{1-\alpha^2})}{\alpha^2} = 1$

alors au moins l'un des facteurs est dans $[-1, 1]$ $\boxed{0,5pt}$

b) Soit $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$
$x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$

Soit $y \in [-1, 1]$, on cherche si l'éq $g(x) = y$ possède au moins une solution $x \in [-1, 1]$.

On a : $g(x) = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$,

or d'après la question $\boxed{2-a}$ l'éq $yx^2 - 2x + y = 0$ admet une racine dans $[-1, 1]$.

Donc l'application g est surjective. $\boxed{0,5pt}$

c) Soit $(x, x') \in [-1, 1]^2$ tel que $g(x) = g(x')$

alors on aura : $2x(1 + x'^2) = 2x'(1 + x^2)$

ceci donne $x + xx'^2 - x' - x'x^2 = 0$

ou encore $xx'(x' - x) + (x - x') = 0$

ainsi : $(x - x')(1 - xx') = 0$ $\boxed{1pt}$

d) Soit $(x, x') \in [-1,1]^2$ tel que $g(x) = g(x')$.

$\boxed{1pt}$ D'après la question $\boxed{2-c}$ on doit avoir
$(x - x') \times (1 - xx') = 0$
on aurait alors $x = x'$ ou $1 = x.x'$
Puisque x et $x' \in [-1,1]$ le cas $xx' = 1$ donne
nécessairement $(x = -1 = x')$ ou $(x = 1 = x')$

Ainsi, $\forall (x,x') \in [-1,1]^2, \; g(x) = g(x') \Rightarrow x = x'$
D'où l'injectivité de g.

$\boxed{0{,}5pt}$ Conclusion : l'application g est bijective.

Ex 3.

1) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence puisqu'elle est :

$\boxed{1pt}$ * réflexive : en effet, si $(n, m) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ alors $n^2 > 0$ et $m^2 > 0$ ce qui entraîne $(n, m) \mathcal{R} (n, m)$,

$\boxed{1pt}$ * évidemment symétrique : si (n, m) et $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ tels que $(n, m) \mathcal{R} (p, q)$ alors $np > 0$ et $mq > 0$ et donc $(p, q) \mathcal{R} (n, m)$.

$\boxed{1pt}$ * transitive : en effet, soit (n, m), (p, q) et (r, s) tels que $(n, m) \mathcal{R} (p, q)$ et $(p, q) \mathcal{R} (r, s)$ alors $np > 0$, $mq > 0$, $pr > 0$ et $qs > 0$.
On a alors

$$(np) \times (pr) > 0 \quad \text{et} \quad (mq) \times (qs) > 0$$
$$\Rightarrow (nr)p^2 > 0 \quad \text{et} \quad (ms) \times q^2 > 0$$
$$\Rightarrow nr > 0 \quad \text{et} \quad ms > 0$$

Ainsi $(n, m) \mathcal{R} (r, s)$.

$\boxed{2pt}$ 2) $cl_{\mathcal{R}}(1,1) = \{(n,m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*,\ n > 0 \text{ et } m > 0\}$

$\Rightarrow cl_{\mathcal{R}}(1,1) = \mathbb{Z}^*_+ \times \mathbb{Z}^*_+ = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*.$