Correct° du devoir N°1

Ex1

1/ $(X \cup A) \cap (X \cup B) = X \cup (A \cap B) = X$

2/ soit $(Y, Y') \in \mathcal{P}(E)$

s'il existe X tq $f(X) = (Y, Y') = (X \cup A, X \cup B)$

alors $A \subset Y$ et $B \subset Y'$ car $Y = X \cup A$ et $Y' = X \cup B$

c.exp (A^c, B^c) n'a pas d'antécédent $\Rightarrow f$ n'est pas surjective.

3/ $\Rightarrow$ $f(\phi) = (\phi \cup A, \phi \cup B) = (A, B)$

$f(A \cap B) = ((A \cap B) \cup A, (A \cap B) \cup B) = (A, B)$

f inj
$f(\phi) = f(A \cap B)$ $\Rightarrow$ $\phi = A \cap B$

$\Leftarrow$ soit $X, X' \in \mathcal{P}(E)$ tq $f(X) = f(X')$

$X \cup A = X' \cup A$
$X \cup B = X' \cup B$

$\Rightarrow (X \cup A) \cap (X \cup B) = (X' \cup A) \cap (X' \cup B)$

$\Rightarrow X \cup (A \cap B) = X' \cup (A \cap B)$

$\Rightarrow X = X' \Rightarrow f$ inj

2/ a/ $f(X) = (\phi, \phi) \Rightarrow (X \cup A, X \cup B) = (\phi, \phi)$

$$\left.\begin{array}{l} A \subset X \cup A = \phi \\ \text{et} \\ B \subset X \cup B = \phi \end{array}\right. \Rightarrow A = \phi \text{ et } B = \phi \text{ absurde}$$

$S = \phi$

b/ si $A = \phi$ et $B = \phi$ alors $f(X) = (X, X)$

$\Rightarrow f(X) = (\phi, E) \Rightarrow (X, X) = (\phi, E)$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \phi \\ X = E \end{cases} \Rightarrow E = \phi \text{ absurde car } E \text{ nonvide}$$

$\Rightarrow S = \phi$

3/ A et $B \in \mathcal{P}(E)$

si A et $B = \phi$ alors (ϕ, E) n'a pas d'antecedent

si $A \neq \phi$ ou $B \neq \phi$ alors (ϕ, ϕ) " "

$\Rightarrow f$ n'est pas surjective

Probleme.

1/ a/ $k\, C_p^k = \frac{k\, p!}{k!\,(p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{(k-1)!\,(p-1-(k-1))!}$

$= p\, C_{p-1}^{k-1}$.

b/ $p \mid k\, C_p^k \xRightarrow{\text{Gauss}} p \mid C_p^k$.

Or p premier $\Rightarrow p \wedge k = 1$

$1 \leq k \leq p-1$

2/ Mq $p \mid a^p - a$

si $a = 0$ $\quad p \mid a^p - a = 0$

supposons que le resultat est vrai à l'ordre a.

$(a+1)^p - (a+1) = \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^k - a - 1$

$= \sum_{k=1}^{p} C_p^k a^k \cancel{+1} - a \cancel{+a} + \cancel{\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k}$

$= a^p - a + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k$.

Or $p \mid a^p - a$ H.R.

$p \mid C_p^k \quad 1 \leq k \leq p-1 \Rightarrow p \mid \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k$.

$\Rightarrow p \mid a^{p+1} - (a+1)$

II.

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} ,a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

1/ pour $a = b = 1$ et $c = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} = I_3 \in \mathcal{A}$$

soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$

$$A - A' = \begin{pmatrix} a-a' & 0 & 0 \\ 0 & b-b' & c-c' \\ 0 & -c+c' & b-b' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb'-cc' & bc'+cb' \\ 0 & -cb'-bc' & bb'-cc' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ est un ss anneau de $M_3(\mathbb{R})$

2/ on a

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A} \text{ pour } a = -2,\ b = 1 \text{ et } c = 1$$

or A est un anneau $\Rightarrow M^k \in A$.

3/ On a

$$M^{k+1} = M^k . M$$

$$= \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k - c_k & b_k + c_k \\ 0 & -c_k - b_k & -c_k + b_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{k+1} & c_{k+1} \\ 0 & -c_{k+1} & b_{k+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi
$$a_{k+1} = -2a_k$$
$$b_{k+1} = b_k - c_k$$
$$c_{k+1} = b_k + c_k$$

4/ $M^0 = I_3 \Rightarrow a_0 = 1$

(a_k) est une suite geometrique de raison -2

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{p} C_p^k (i)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{p} C_p^k \, i^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{E(p/2)} C_p^{2k} (-1)^k + i \sum_{k=0}^{E(p/2)} C_p^{2k+1} (-1)^k$$

$$\Rightarrow \quad Re\left((1+i)^p\right) = \sum_{k=0}^{E(p/2)} C_p^{2k} (-1)^k$$

$$tr(M^p) = (-2)^p + 2\sum_{k=0}^{E(p/2)} C_p^{2k} (-1)^k$$

$$= 2 + (-2)^p + 2\sum_{k=1}^{E(p/2)} C_p^{2k} (-1)^k$$

b/ On a $1 \leq k \leq E(p/2) \leq p/2$

$\Rightarrow 2 \leq 2k \leq p$

p impair $\Rightarrow$ $2k < p$

$\Rightarrow 2k \leq p-1$

$\Rightarrow \quad p \,/\, C_p^{2k}$

$\Rightarrow \quad p \,/\, 2\sum_{k=1}^{E(p/2)} C_p^{2k} (-1)^k$

p premier $\Rightarrow$ $p = 2$ ou $p > 2$ et donc p impair

1 cas si $p > 2$

$2 + (-2)^p = 2 + (-1)^p 2^p = 2 - 2^p = -(2^p - 2)$

et $p \,/\, 2^p - 2$ d'après fermat

<u>2 cas</u> si $p = 2$ $\quad (-2)^p + 2 = 6$ et $2 / 6$.

$\Rightarrow \quad p \,/\, 2 + (-2)^p$ $\forall p$ premier $\Rightarrow p \,/\, tr(M^p)$