Institut Préparatoire aux Etudes d'ingénieurs-El Manar **Janvier 2017**
Département de Mathématiques **MP1**

Corrigé de l'examen $n^o 1$

Exercice

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1$. Comme f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution rationnelle $\frac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre eux. Les entiers p et q vérifient alors les égalités équivalentes suivantes:

$$\frac{p^3}{q^3} + \frac{p}{q} - 1 = 0 \Leftrightarrow p^3 + pq^2 - q^3 = 0 \Leftrightarrow p(p^2 + q^2) = q^3.$$

Ainsi p divise q^3 et comme p et q sont premiers entre eux, on peut en conclure que p divise q. Ceci contredit l'hypothèse p et q premiers entre eux. Par conséquent $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

3. (a) Comme il ne peut exister de réel a vérifiant à la fois $f(a) > 0$ et $f(a) < 0$, on a alors $A \cap B = \emptyset$. De plus comme $f(a) \neq 0$ pour tout rationnel a, alors $a \in A$ ou $a \in B$. Ainsi $\mathbb{Q} \subset A \cup B$. L'autre inclusion est immédiate.

   (b) Soient $a \in A$ et $b \in B$ quelconques. On a $f(a) < 0 < f(b)$ et puisque f est strictement croissante, on en déduit que $a < b$.

4. A est non vide car $0 \in A$. De plus étant donné $b \in B$ on a $a \leq b$ pour tout $a \in A$. Ainsi A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. D'où $\sup A$ existe.
   De même B est non vide car $1 \in B$ et pour $a \in A$ fixé, on a $b \geq a$ pour tout $b \in B$. Ainsi B est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. D'où $\inf B$ existe.

5. On vérifie facilement que $\dfrac{1}{2} \in A$ et $\dfrac{3}{4} \in B$ Ainsi $0 < \dfrac{1}{2} \leq \alpha$ et $\beta \leq \dfrac{3}{4} < 1$. D'autre part d'après 3.(b) on a tout élément b de B majore A et donc $\alpha \leq b$. b étant quelconque dans B, on en déduit que $\alpha \leq \beta$. On obtient donc $0 < \alpha \leq \beta < 1$.

6. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers α. Comme f est continue en α, on obtient en passant à la limite $f(\alpha) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n)$. Puisque $f(a_n) < 0$ pour tout n, on a alors $f(\alpha) \leq 0$.
   Un raisonnement analogue montre que $f(\beta) \geq 0$.

7. Supposons que $\alpha < \beta$. D'après la denstité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe au moins un rationnel c compris strictement entre α et β. $c \in A \cup B$ d'après $3(a)$ et ceci est impossible car $\alpha < c < \beta$ et donc c ne peut être ni dans A ni dans B.

8. Comme $\alpha = \beta$ alors d'après 6. on obtient $f(\alpha) = 0$.

Problème

Question préliminaire

On a par hypothèse sur la convergence de (u_n) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0, \ |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

D'autre part, on a, pour tout entier naturel $n \geq n_0$:

$$|v_n - l| = \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k - l\Big| = \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{n}(u_k - l)\Big| = \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l) + \sum_{k=n_0}^{n}(u_k - l)\Big|.$$

L'inégalité triangulaire donne alors:

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l)\Big| + \sum_{k=n_0}^{n}\Big|u_k - l\Big|.$$

On applique alors au deuxième terme l'inégalité (1), pour tout entier $n \geq n_0$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{(n - n_0 + 1)\varepsilon}{2n}$$

Comme $n \geq n_0$, on a alors $(n - n_0 + 1) \leq n$ et par suite

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, le premier terme étant une somme finie de réels, on a:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l)\Big| = 0$$

Ce qui donne, d'après la définition de la limite:

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_1, \ \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l)\Big| \leq \varepsilon'.$$

En prenant alors $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ et en posant $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, on obtient:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_2, \ |v_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui, permet donc d'écrire:

$$\lim v_n = l.$$

(II)

1. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. Ainsi (u_n) est une suite croissante.
2. (a) La suite (u_n) étant croissante, elle admet donc une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons l finie, un passage à la limite dans l'équation $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ montre que l est nécessairement nulle. Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_0 = a > 0$, donc par passage à la limite, on obtient $l \geq a > 0$. D'où la contradiction. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(b) Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} v_{n+k+1} - v_{n+k} &= \frac{1}{2^{n+k+1}} \ln(u_{n+k+1}) - \frac{1}{2^{n+k}} \ln(u_{n+k}) \\ &= \frac{1}{2^{n+k+1}} \Big(\ln(u_{n+k+1}) - 2\ln(u_{n+k}) \Big) \\ &= \frac{1}{2^{n+k+1}} \ln\Big(\frac{u_{n+k+1}}{u_{n+k}^2} \Big) \\ &= \frac{1}{2^{n+k+1}} \ln\Big(\frac{u_{n+k}^2 + u_{n+k}}{u_{n+k}^2} \Big) \\ &= \frac{1}{2^{n+k+1}} \ln\Big(1 + \frac{1}{u_{n+k}} \Big) \end{aligned}$$

Or $0 \leq \ln\Big(1 + \dfrac{1}{u_{n+k}}\Big)$ car (u_n) est positive et $\ln\Big(1 + \frac{1}{u_{n+k}}\Big) \leq \ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big)$ car (u_n) est croissante.
Ainsi

$$0 \leq v_{n+k+1} - v_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k+1}} \ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big)$$

(c) Pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq v_{n+p} - v_n &= \sum_{k=0}^{p-1} \Big(v_{n+k+1} - v_{n+k} \Big) \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+k+1}} . \ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} . \ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big) . \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \tfrac{1}{2^{n+1}} . \frac{1 - (\frac{1}{2})^p}{1 - \frac{1}{2}} . \ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big) \\ &\leq \tfrac{1}{2^n} \ln\Big(1 + \tfrac{1}{u_n}\Big). \end{aligned}$$

(d) En remplaçant p par 1 dans l'inégalité précedente, on obtient $v_{n+1} - v_n \geq 0$ pour tout entier n et donc (v_n) est croissante.

(e) Remplaçons dans l'encadrement $0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big)$ l'entier n par 0, on obtient $v_p - v_0 \leq \ln\Big(1 + \frac{1}{u_0}\Big)$ pour tout entier p. La suite (v_n) est alors majorée par $\ln(1 + a)$. La suite (v_n) est donc convergente.
En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$0 \leq l_1 - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big).$$

(f) D'après (e) on a

$$0 \leq l_1 - \frac{1}{2^n} \ln u_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big)$$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \exp(2^n l_1) \leq u_n + 1.$$

(g) En divisant par $\exp(2^n l_1)$, on obtient

$$1 - \exp(-2^n l_1) \leq \frac{u_n}{\exp(2^n l_1)} \leq 1.$$

Le passage à la limite montre que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\exp(2^n l_1)} = 1$. Autrement dit $u_n \sim \exp(2^n l_1)$.

3. Si $a < -1$, on remarque que $u_1 = a^2 + a = b > 0$ on se ramène donc au cas précédent en considérant la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

4. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-1, 0[$.
Pour $n = 0$, $u_0 = a \in]-1, 0[$.
Supposons que $u_n \in]-1, 0[$, une étude simple de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x$ sur $]-1, 0[$ montre que $u_{n+1} = f(u_n) \in]-1, 0[$.

   (b) La suite (u_n) est croissante majorée par 0 elle est donc convergente vers l_2. De plus sachant que $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout entier n on a alors $l_2 = 0$.

   (c) On a $w_n = \frac{u_{n-1} - u_n}{u_{n-1}u_n} = -\frac{u_{n-1}}{u_n}$. Comme $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}^2 + u_{n-1}}{u_{n-1}} = u_{n-1} + 1$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} w_n = -1$.

   (d) D'après le lemme de Cesaro, $\lim_{n\to+\infty} \frac{w_1 + w_2 + ... + w_n}{n} = -1$. Or $w_1 + w_2 + ... + w_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}$, donc $-1 = \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} - \frac{1}{nu_0}$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = -1$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_0} = 0$. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} nu_n = -1$.

5. Si $a = 0$ ou $a = -1$, il est clair que $(u_n)_{n\geq 1}$ est nulle.