INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS EL MANAR

Examen n° 1 d'ALGEBRE

Classes: 1 PT et 1 PC — 02 - 01 - 2017

Nombre de pages : 2 — Durée : 2 Heures

Exercice 1 $\boxed{5pts}$

Soit A et P les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 — 1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

2. On pose $T = PAP^{-1}$.

1 — (a) Calculer la matrice T.

0,25+0,25+0,5 — (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour tout entier naturel $n \geq 3$.

1 — 3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}T^nP$.

1 — 4. En déduire que A est une matrice nilpotente.

Exercice 2 $\boxed{7pts}$

On considère la suite de polynômes P_n de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{cases} P_0 = 1, \quad P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

0,5+0,5 — 1. Calculer P_2 et P_3.

1+1 — 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1}.

1 — 3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})) = \frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n})$.

1 — 4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

1 — 5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines distinctes

$$x_k = \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}), \quad k \in \{0, ..., n-1\}.$$

1 — 6. Factoriser P_n.

Exercice 3 $\boxed{8 \text{ pts}}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(X) = X^3 - 9X^2 + 15X - 1.$$

1 1. Déterminer les racines du polynôme P' dérivée de P.

1 2. En déduire que P n'admet que des racines simples.

Par la suite, on note a, b et c les trois racines deux à deux distinctes de P.

0,5 + 0,5 3. Calculer $a + b + c$ et $a\,b\,c$.

1 4. Resoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système homogène

$$H : \begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ x + by + b^2 z = 0 \\ x + cy + c^2 z = 0 \end{cases}$$

1 5. En déduire que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

est inversible.

1 6. Effectuer la division euclidienne de X^4 par P.

1 + 1 7. En déduire que $\underline{(9, -134, 66)}$ est l'unique solution du système

$$S : \begin{cases} x + ay + a^2 z = a^4 \\ x + by + b^2 z = b^4 \\ x + cy + c^2 z = c^4 \end{cases}$$

Exercice 1

1) On applique l'algorithme de Gauss_Jordan :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 5L_3 - 3L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -10 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 10 \\ 2 & -6 & -10 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 20 & -40 & -60 \\ 0 & 10 & 10 \\ 2 & -6 & -10 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{20} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{10} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{-1}{2} L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

2)(a) on a $PA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) on a $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, $T^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

3) on a $T = PAP^{-1} \Rightarrow A = P^{-1}TP$

on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = P^{-1}T^nP$

4) on aura alors pour $n \geq 3$, $A^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Donc A est une matrice nilpotente.

Exercice 2 :

1) Par définition : $P_2 = 2X P_1 - P_0 = 2X^2 - 1$

et $P_3 = 2X P_2 - P_1 = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété

$A(n)$: « $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1} ».

Les propriétés $A(1)$ et $A(2)$ sont vraies car $\deg P_2 = 2$,

le coefficient dominant de P_2 est égal à $2^{2-1} = 2$,

$\deg P_1 = 1$ et le coefficient dominant de P_1 est $1 = 2^{1-1}$.

Supposons la propriété $A(n)$ est vraie jusqu'à un entier

n fixé, $n \geqslant 2$. Montrons que $A(n+1)$ est vraie.

Par construction $P_{n+1} = 2X P_n - P_{n-1}$ alors :

$$\deg(P_{n+1}) \leqslant \max(\deg(XP_n), \deg(P_{n-1}))$$
$$\leqslant \max(n+1, n-1)$$

Donc $\deg P_{n+1} = n+1$.

De plus $P_n = 2^{n-1}X^n + R_n$ avec $\deg R_n < n$

et $P_{n-1} = 2^{n-2}X^{n-1} + R_{n-1}$ avec $\deg R_{n-1} < n-1$

alors $2X P_n + P_{n-1} = 2^n X^{n+1} + 2X R_n - 2^{n-2}X^{n-1} - R_{n-1}$

avec $\deg(2XR_n - 2^{n-2}X^{n-1} - R_{n-1}) < n+1$.

Ainsi $\deg P_{n+1} = n+1$ et le coefficient dominant est 2^n.

La propriété $A(n+1)$ est vraie. On peut donc conclure :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A(n)$ est vraie.

3) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

« $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ ».

La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$. En effet :

$P_0\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = 1 = \frac{1}{2}\left(z^0 + \frac{1}{z^0}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$

$P_1\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(z^1+\frac{1}{z^1}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

On suppose que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $n+$ on a alors $P_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$

et $P_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Montrons que $P_{n+2}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\right)$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a: $P_{n+2}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)P_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) - P_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$

$$\Rightarrow P_{n+2}\left(\tfrac{1}{2}\left(z+\tfrac{1}{z}\right)\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \frac{1}{2}\times\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(z^{n+2}+\frac{1}{z^n}+z^n+\frac{1}{z^{n+2}}-z^n-\frac{1}{z^n}\right)$$
$$\Rightarrow P_{n+2}\left(\tfrac{1}{2}\left(z+\tfrac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\right)$$

. On a ainsi montré que la propriété est vraie au rang $n+2$.

+) Première méthode: (raisonnement par récurrence)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété:

« $\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ ».

* Pour $n=0$:

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\times\theta)$, donc la propriété est vraie pour $n=0$.

* Pour $n=1$:

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1\times\theta)$, donc la propriété est vraie pour $n=1$.

supposons la propriété est vraie jusqu'à un entier $n+1$ où n est un entier fixé. Alors, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ on a:

$$P_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta\, P_{n+1}(\cos\theta) - P_n(\cos\theta)$$
$$= \underbrace{2\cos\theta \times \cos((n+1)\theta)} - \cos(n\theta) =$$
$$= \cos(\theta+(n+1)\theta) + \cos(\theta-(n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$
$$= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta)$$

Donc : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_{n+2}(\cos\theta) = \cos((n+2)\theta)$.
Ceci montre que la propriété est vraie pour l'entier $n+2$.

<u>Deuxième méthode</u> : (conséquence de la question 3)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_n(\cos\theta) = P_n\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) = P_n\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)\right) \underset{\text{d'aprés le résultat de la question 3}}{=} \frac{1}{2}\left(e^{in\theta}+\frac{1}{e^{in\theta}}\right)$$

Ainsi $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ on a :

$$P_n\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right) = \cos\left(n \times \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$$

Donc, $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ le réel $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ est une racine de P_n. Montrons que ces racines sont deux à deux distinctes. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$

On voit que si $(k,l) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tq $k < l$ alors $\theta_k < \theta_l$

de plus : si $0 \leq k \leq n-1$ alors $0 < (2k+1)\frac{\pi}{2n} \leq \frac{2n-1}{2n}\pi < \pi$

càd : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\theta_k \in \,]0, \pi[$

Comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on en déduit que : $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} > \cos\frac{(2l+1)\pi}{2n}$ dés que $k < l$ pour $(k,l) \in [\![0, n-1]\!]^2$.

Ainsi les réels $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont n racines distinctes de P_n.

6) La factorisation des $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ est donnée par :

$$\begin{cases} P_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = 2^{n-1} \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right). \end{cases}$$

Exercice 3.

1) $P' = 3X^2 - 18X + 15$, les racines de P' sont les solutions de l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ qui sont donc 1 et 5.

2) On voit que $P(1) \neq 0$ et $P(5) \neq 0$, alors P n'admet pas une racine multiple.

3) on a $P = X^3 - 9X^2 + 15X - 1 = (X-a)(X-b)(X-c)$, alors $a + b + c = 9$ et $abc = 1$.

6) La division euclidienne de X^4 par P donne :

$$X^4 = (X+9)P + 66X^2 - 134X + 9.$$

4) Soit (H) : $\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ x + by + b^2 z = 0 \\ x + cz + c^2 z = 0 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$(H) \text{ éq } \begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ (b-a)y + (b^2 - a^2) z = 0 \\ (c-a)y + (c^2 - a^2) z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} L_2 \leftarrow \frac{1}{b-a} L_2 & (a \neq b) \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{c-a} L_3 & (a \neq c) \end{array}$$

$$(H) \text{ éq } \begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ y + (b+a) z = 0 \\ y + (c+a) z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$(H) \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ y + (a+b) z = 0 \\ (c-b) z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \quad (c \neq b) \end{cases}$$

L'unique solution de (H) est $(0,0,0)$.

5) D'après la question précédente, l'unique solution de l'équation matricielle $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc A est inversible

7) La relation établie dans la question (6) nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} a^4 = (a+9)P(a) + 66a^2 - 134a + 9 \\ b^4 = (b+9)P(b) + 66b^2 - 134b + 9 \\ c^4 = (c+9)P(c) + 66c^2 - 134c + 9 \end{cases}$$

Comme $P(a) = P(b) = P(c) = 0$, on aura :

$$\begin{cases} 9 + a.(-134) + a^2 \times 66 = a^4 \\ 9 + b \times (-134) + b^2 \times 66 = b^4 \\ 9 + c \times (-134) + c^2 \times 66 = c^4 \end{cases}$$

Donc $(9, -134, 66)$ est une solution du système (S).

En fait c'est l'unique solution de (S) puisque (S) est un système de Cramer.