INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS EL MANAR

Devoir surveillé n° 2 d'ALGEBRE

Classes: 1 PT et 1 PC — 15 - 3 - 2016

Nombre de pages : 1 — Durée : 1H

Exercice 1 (8pt)

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère les vecteurs $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_1 - e_2 + e_3$ et $v_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.

On note $F = vect(v_1)$ et $G = vect(v_2, v_3)$.

(1pt) 1. a) Montrer que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(1pt) b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Par la suite, on note p la projection sur F parallèlement à G, q la projection sur G parallèlement à F et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

(1,5pt) 2. a) Montrer que les coordonnées respectives des vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans la base B' sont $(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $(-1, 1, 0)$.

(0,5) (0,5) (0,5)

(2pt) b) Soit $u \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base B.

4x(0,5) Exprimer en fonction de x, y et z, les coordonnées de u dans la base B' puis $p(u)$, $q(u)$ et $s(u)$.

(2,5pt) 3. Déterminer $p + q$, $p \circ q$, $s \circ s$, $s \circ p$ et $s \circ q$.

5x(0,5)

Exercice 2 (12pt)

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g = Id_E$ et $rg\, f + rg\, g \leq \dim E$.

(1pt) 1. a) Vérifier que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

(1pt) b) Déterminer la dimension de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$.

(1pt) + (1pt) c) En déduire que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$ et que $rg\, f + rg\, g = \dim E$.

2. Soit $x \in E$.

(1pt) a) Montrer que $f(x) - f^2(x) \in \operatorname{Im} g$.

(1pt) b) Montrer que $g(x) - g^2(x) \in \operatorname{Im} f$.

(1pt) + (1pt) 3. En déduire que f et g sont deux projections.

(1pt) + (1pt) 4. a) Montrer que $f \circ g = 0$ et en déduire que $\operatorname{Im} g = \ker f$.

(1pt) + (1pt) b) Montrer que $g \circ f = 0$ et en déduire que $\operatorname{Im} f = \ker g$.

Exercice n°1 : (8pts)

Soit $B=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Posons $v_1=e_1-e_2$, $v_2=e_1-e_2+e_3$ et $v_3=e_1+2e_2+e_3$.

On note $F=\mathrm{Vect}(v_1)$ et $G=\mathrm{Vect}(v_2,v_3)$.

1 a) Soit $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)e_1+(-\alpha-\beta+2\gamma)e_2+(\beta+\gamma)e_3=(0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ -\alpha-\beta+2\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-\beta\\ \alpha+\beta-\beta=0\\ -\alpha-3\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Donc $B'=(v_1,v_2,v_3)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Comme $\mathrm{Card}(B')=3=\dim\mathbb{R}^3$, alors B' est une base de $\mathbb{R}^3$. (1pt)

Deuxième méthode :

$$\mathrm{rg}(v_1,v_2,v_3)=\mathrm{rg}\begin{array}{c c}\begin{array}{ccc}v_1 & v_2 & v_3\end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}e_1\\e_2\\e_3\end{array}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&3\\0&1&1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftrightarrow L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{rg}(v_1,v_2,v_3)=3 \Longrightarrow B'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Comme B' est une base de $\mathbb{R}^3$, alors $\exists!\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$$(x,y,z) = \underbrace{\alpha v_1}_{\in F} + \underbrace{\beta v_2 + \gamma v_3}_{\in G}$$

Donc $\boxed{\mathbb{R}^3 = F + G}$ (1)

Soit $(x,y,z) \in F \cap G$, alors $\exists\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$$(x,y,z) = \alpha v_1 = \beta v_2 + \gamma v_3 \iff \beta v_2 + \gamma v_3 - \alpha v_1 = (0,0,0)$$
$$\iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

D'où $F \cap G = \{(0,0,0)\}$ (2)

(1) + (2) donne $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$ 1pt

2ème méthode :

$\begin{cases} \{v_1\} \subset \{v_1, v_2, v_3\} \\ \{v_2, v_3\} \subset \{v_1, v_2, v_3\} \end{cases}$ et $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre alors

$\dim F = 1$ et $\dim G = 2$.

Alors on a : $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3$ ... (3).

(2) + (3) donne $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

On note :

$$p : \mathbb{R}^3 = F \oplus G \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$u = x_F + x_G \longmapsto p(u) = x_F$$

$$q : \mathbb{R}^3 = F \oplus G \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$u = x_F + x_G \longmapsto q(u) = x_G$$

$$s : u = x_F + x_G \longmapsto s(u) = x_F - x_G.$$

2a) on a $\begin{cases} v_1 = e_1 - e_2 \\ v_2 = e_1 - e_2 + e_3 \\ v_3 = e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = e_1 - e_2 \ (1) \\ v_2 = e_1 - e_2 + e_3 \ (2) \\ v_3 - v_2 = 3e_2 \ (3) \end{cases}$

$(3) \Rightarrow e_2 = \dfrac{-v_2 + v_3}{3}$.

$(1) \Rightarrow e_1 = v_1 + \dfrac{-v_2 + v_3}{3}$

$(2) \Rightarrow e_3 = v_2 - v_1 + \dfrac{v_2 - v_3}{3} + \dfrac{-v_2 + v_3}{3}$.

$= v_2 - v_1$.

Donc $X_{B'}(e_1) = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $X_{B'}(e_2) = \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

et $X_{B'}(e_3) = (-1, 1, 0)$. 1,5pts $= 3 \times (0{,}5\text{pt})$.

b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$u = x e_1 + y e_2 + z e_3$.

$= x v_1 - \frac{x}{3} v_2 + \frac{x v_3}{3} + \frac{y}{3} v_3 - \frac{y}{3} v_2 + z v_2 - z v_1$

$= (x - z) v_1 + \left(\frac{-x-y}{3} + z\right) v_2 + \left(\frac{x+y}{3}\right) v_3$.

Donc $X_{B'}(u) = \left(x - z, \frac{-x-y}{3} + z, \frac{x+y}{3}\right)$ 0,5pt

⊛ $p(u) = (x - z) v_1$ 0,5pt, $q(u) = \left(\frac{-x-y}{3} + z\right) v_2 + \left(\frac{x+y}{3}\right) v_3$ 0,5pt

⊛ $s(u) = (x - z) v_1 + \left(\frac{x+y}{3} - z\right) v_2 - \left(\frac{x+y}{3}\right) v_3$ 0,5pt

3) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

* $(p+q)(u) = p(u) + q(u) = u = Id_{\mathbb{R}^3}(u)$.

Donc $\boxed{p + q = Id_{\mathbb{R}^3}}$ 0,5pt

* $p \circ q(u) = p(q(u)) = p\left(\left(\frac{-x-y}{3} + z\right)v_2 + \left(\frac{x+y}{3}\right)v_3\right)$

$= 0$

Donc $\boxed{p \circ q = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}$ 0,5pt

* $\boxed{s \circ s = Id_{\mathbb{R}^3}}$ 0,5pt

* $s \circ p(u) = s\left((x-z)v_1\right) = (x-z)v_1 = p(u)$

Donc $\boxed{s \circ p = p}$ 0,5pt

* $s \circ q(u) = s\left(\left(\frac{-x-y}{3} + z\right)v_2 + \left(\frac{x+y}{3}\right)v_3\right)$

$= \left(\frac{x+y}{3} - z\right)v_2 - \left(\frac{x+y}{3}\right)v_3 = -q(u)$.

Donc $\boxed{s \circ q = -q}$ 0,5pt

Exercice 2 : 12pts

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tq $f+g = Id_E$ et $rg f + rg g \leq \dim E$.

1a) Soit $x \in E$, alors $x = \underbrace{f(x)}_{\in Im f} + \underbrace{g(x)}_{\in Im g}$

Donc $\boxed{E = Im f + Im g}$ 1pt

b) On a $E = Im f + Im g$

Alors $\dim E = \dim Im f + \dim Im g - \dim (Im f \cap Im g)$

$= rg f + rg(g) - \dim (Im f \cap Im g)$.

$\Rightarrow \dim (Im f \cap Im g) = rg f + rg(g) - \dim E \leq 0$

$\Rightarrow \boxed{\dim (Im f \cap Im g) = 0}$ 1pt

c) D'après b) $\dim (Im f \cap Im g) = 0$, alors

$Im f \cap Im g = \{0_E\}$

De plus d'après 1a), $E = Im f + Im g$.

Ce qui implique $\boxed{E = Im f \oplus Im g}$ 1pt

Par suite $\dim E = \dim Im f + \dim Im g$.

$= rg(f) + rg(g)$. 1pt

2) Soit $x \in E$.

a) On a : $f+g = Id_E$.

$(f+g)(f(x)) = f(x) \Leftrightarrow f^2(x) + g \circ f(x) = f(x)$.

$\Rightarrow \boxed{f(x) - f^2(x) = g(f(x)) \in Im\, g}$ (1pt)

b) $(f+g)(g(x)) = g(x) \Leftrightarrow f \circ g(x) + g^2(x) = g(x)$

$\Rightarrow \boxed{g(x) - g^2(x) = f(g(x)) \in Im\, f}$ (1pt)

3) On a $\forall x \in E$,

(*) $f(x) - f^2(x) \in Im\, g$ et $f(x) - f^2(x) = f(x - f(x)) \in Im\, f$.

$\Rightarrow f(x) - f^2(x) \in Im\, g \cap Im\, f = \{0_E\}$.

$\Rightarrow f^2(x) = f(x) \Leftrightarrow f^2 = f \circ f = f$

Donc f est un projecteur. (1pt)

(**) $g(x) - g^2(x) \in Im\, f$ et $g(x) - g^2(x) = g(x - g(x)) \in Im\, g$.

$\Rightarrow g(x) - g^2(x) \in Im\, f \cap Im\, g = \{0_E\}$.

D'où $g^2(x) = g(x) \Leftrightarrow g^2 = g$

Donc g est un projecteur. (1pt)

4a) On a $f + g = Id_E$.

$\Rightarrow (f+g) \circ g = g \Leftrightarrow f \circ g + g^2 = g \Rightarrow \boxed{f \circ g = 0}$ (1pt)

Donc $\boxed{\mathrm{Im}\, g \subset \ker f}$ (1).

Soit $x \in \ker f$, alors $f(x) = 0_E$.

Comme $f(x) + g(x) = x$ alors $g(x) = x \in \mathrm{Im}\, g$.

D'où $\boxed{\ker f \subset \mathrm{Im}\, g}$ (2)

(1) + (2) $\Longrightarrow$ $\boxed{\ker f = \mathrm{Im}\, g}$. 1pt

b) On a : $f + g = Id_E$.

$\Longrightarrow g \circ (f+g) = g \circ Id_E = g$.

$\Longrightarrow g \circ f + g^2 = g \Longrightarrow \boxed{g \circ f = 0}$ 1pt

Donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f \subset \ker f}$ (1).

Soit $x \in \ker g$, alors $g(x) = 0_E$.

Comme $\forall x \in E$, $f(x) + g(x) = x$, alors $f(x) = x \in \mathrm{Im}\, f$

D'où $\boxed{\ker g \subset \mathrm{Im}\, f}$ (2)

(1) + (2) $\Longrightarrow$ $\boxed{\ker g = \mathrm{Im}\, f}$ 1pt