Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs EL MANAR

Matière : Algèbre **Niveau/Section** : $2^{\text{ème}}$ année MP

Corrigé Examen n°2

PRÉLIMINAIRES

1) *a*) Pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$ on a $AE_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj}$ et $E_{ij}A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik}$.

b)

$$\begin{aligned}
&\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad AM = MA \\
&\Longleftrightarrow \forall 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad AE_{ij} = E_{ij}A \\
&\Longleftrightarrow \forall 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj} - \sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \forall 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} a_{ki}E_{kj} - a_{jk}E_{ik}\right) + a_{ii}E_{ij} - a_{ji}E_{ii} + a_{ji}E_{jj} - a_{jj}E_{ij} = 0
\end{aligned}$$

en particulier $a_{ki} = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \neq i$ et $a_{ii} = a_{jj}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

---

2) *a*) Pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $Tr(AE_{ij}) = Tr(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}Tr(E_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\delta_{kj} = a_{ji}$.

b) Si $Tr(AM) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$, on a $Tr(AE_{ij}) = 0$ et par suite $a_{ji} = 0, \forall 1 \leqslant i,j \leqslant n$. Ainsi $A = 0$.

---

3) Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $AB = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $BA = (d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$ et

$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$ et par suite $Tr(AB) = Tr(BA)$.

---

4) Conséquence direct du théorème de l'invariance du rang.

PREMIERE PARTIE

$A]$ 1) On pose $A+\lambda J_s=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors pour tout $1\leqslant i,j\leqslant n$ on a

$$\begin{cases} b_{ij}=a_{ij}, & \text{si } i\neq j\,; \\ b_{ii}=a_{ii}+\lambda, & \text{si } 1\leqslant i\leqslant s \\ b_{ii}=a_{ii}, & \text{si } s+1\leqslant i\leqslant n \end{cases}$$

En utilisant le fait que $det(A+\lambda J_s)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}b_{i\sigma(i)}$,

on en déduit qu'il existe au maximum s facteurs de λ parmi les $b_{i\sigma(i)}$. Ainsi $det(A+\lambda J_s)\in\mathbb{C}_s[X]$.

---

2) $a)$ $rg\,M=r=rg\,J_r \implies M$ est équivalente à $J_r \implies$ il existe $R,S\in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M=RJ_rS$.

$b)$ On a

$$det(\lambda M+N)=det(\lambda RJ_rS+RK_rS)=det(R)det(\lambda J_r+K_r)det(S)=\lambda^r det(R)det(S)$$

$c)$ $rg(\Phi(M))=s \implies$ il existe $R,S\in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $\Phi(M)=RJ_sS$. Par suite

$$det(\lambda\Phi(M)+\Phi(N))=det(\lambda RJ_sS+\Phi(N))=det(R)det(\lambda J_s+R^{-1}\Phi(N)S^{-1})det(S)$$

Ainsi d'après 1) $det(\lambda\Phi(M)+\Phi(N))\in\mathbb{C}_s[X]$. Puisque Φ conserve le déterminant, alors

$$det(\lambda\Phi(M)+\Phi(N))=det(\Phi(\lambda M+N))=det(\lambda M+N)=\lambda^r det(R)det(S).$$

En particulier $r\leqslant s$ et donc $rg\,(M)\leqslant rg\,(\Phi(M))$.

---

3) Soit $M\in Ker\,(\Phi)$ alors $\Phi(M)=0$ et donc $0\leqslant rg\,(M)\leqslant rg\,(\Phi(M))=0$, en particulier $M=0$ et par suite $Ker\,\Phi=\{0\}$ et Φ est injective. Comme $\Phi\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ alors d'après le Théorème du rang on en déduit que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

---

4) Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme Φ conserve le déterminant, alors

$$det(\Phi^{-1}(M))=det(\Phi(\Phi^{-1}(M)))=det(M).$$

---

5) D'après 4) on sait que Φ^{-1} conserve le déterminant, par conséquent en appliquant 2) $c)$ on en déduit que $rg(\Phi(M))\leqslant rg(\Phi^{-1}(\Phi(M)))=rg(M)$. En réutilisant 2)$c)$ on trouve que $rg(\Phi(M))=rg(M)$ et donc Φ conserve le rang et est donc de la forme $u_{P,Q}$ ou $v_{P,Q}$.

$B]$1) On a $\chi_{\Phi(M)}=\chi_M$ est scindé dans $\mathbb{C}$ par conséquent ils ont exactement les mêmes racines et par suite $det(\Phi(M)) = \prod_{\lambda \in Sp(\Phi(M))} \lambda = \prod_{\lambda \in Sp(M)} \lambda = det(M)$, de la même manière $Tr(\Phi(M)) = \sum_{\lambda \in Sp(\Phi(M))} \lambda = \sum_{\lambda \in Sp(M)} \lambda = Tr(M)$.

N.B : Il va de soit que dans les formules précédentes chaque valeurs propres est comptée autant de fois que sa multiplicité. On peut également utiliser l'identification entre les coefficients de $\chi_{\Phi(M)}$ et de χ_M sachant qu'un polynôme caractéristique s'écrit toujours sous la forme $\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} Tr(A) X^{n-1} + \cdots + det\, A$.

---

2) Comme Φ conserve le déterminant alors d'après la question $A]\,5)$, Φ conserve le rang et est donc de la forme $u_{P,Q}$ ou $v_{P,Q}$.

---

3) $a)$ Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a $Tr(PE_{ij}Q) = Tr(\Phi(E_{ij})) = Tr(E_{ij})$, ou $Tr(PE_{ij}Q) = Tr(\Phi({}^tE_{ij})) = Tr({}^tE_{ij}) = Tr(E_{ij})$.

$b)$ Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a $Tr(QPE_{ij}) = Tr(PE_{ij}Q) = Tr(E_{ij})$ et par suite pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a $Tr((QP - I_n)E_{ij}) = 0$, ainsi pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $Tr((QP - I_n)M) = 0$, ce qui implique d'après préliminaire$]\,2)\,b)$ que $QP = I_n$ et donc $Q = P^{-1}$.

4) Φ est donc de la forme $u_{P,P^{-1}}$ ou $v_{P,P^{-1}}$.

DEUXIÈME PARTIE

---

1) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\chi_{\Phi(A)\Phi(B)} = \chi_{AB}$, et ce polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$, ainsi on en déduit que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $det(\Phi(A)\Phi(B)) = det(AB)$ et $Tr(\Phi(A)\Phi(B)) = Tr(AB)$.

$a)$ Pour tout $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$, on a

$$Tr(\Phi(E_{ij})\Phi(E_{kl})) = Tr(E_{ij}E_{kl}) = Tr(\delta_{jk}E_{il}) = \delta_{jk}Tr(E_{il}) = \delta_{jk}\delta_{il}.$$

$b)$ On a $Card\left(\{\Phi(E_{ij}) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}\right) = n^2 = dim\, \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit donc de montrer que la famille $\{\Phi(E_{ij}) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ est libre. En effet soit $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ tels que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{ij}\Phi(E_{ij}) = 0$, alors pour tout $1 \leqslant k, l \leqslant n$, on a $Tr\left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{ij}\Phi(E_{ij})\Phi(E_{kl})\right) = 0$ et par suite $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{ij} Tr(\Phi(E_{ij})\Phi(E_{kl})) = 0$. Cela implique d'après 1)$a)$ que $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{ij}\delta_{jk}\delta_{il} = 0$ et donc $\alpha_{kl} = 0$. Cela étant vrai pour tout $1 \leqslant k, l \leqslant n$, on en déduit que la famille $\{\Phi(E_{ij}) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ est libre.

---

2) $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$a)$ Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned}
Tr((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))\Phi(E_{ij})) &= Tr(\Phi(A+B)\Phi(E_{ij}) - \Phi(A)\Phi(E_{ij}) - \Phi(B)\Phi(E_{ij})) \\
&= Tr(\Phi(A+B)\Phi(E_{ij})) - Tr(\Phi(A)\Phi(E_{ij})) - Tr(\Phi(B)\Phi(E_{ij})) \\
&= Tr((A+B)E_{ij}) - Tr(AE_{ij}) - Tr(BE_{ij}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$b)$ Comme la famille $\{\Phi(E_{ij}) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Tr((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))M) = 0$ et par suite d'après Préléminaires)2)$b)$ on obtient que $\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B) = 0$.

---

3) Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\begin{aligned}
Tr((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))\Phi(E_{ij})) &= Tr(\Phi(\lambda A)\Phi(E_{ij}) - \lambda\Phi(A)\Phi(E_{ij})) \\
&= Tr(\Phi(\lambda A)\Phi(E_{ij})) - \lambda Tr(\Phi(A)\Phi(E_{ij})) \\
&= Tr((\lambda A)E_{ij}) - \lambda Tr(AE_{ij}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme la famille $\{\Phi(E_{ij}) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Tr((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))M) = 0$ et par suite d'après Préléminaires)2)$b)$ on obtient que $\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A) = 0$. Ainsi pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\Phi(A+B) = \Phi(A) + \Phi(B)$ et $\Phi(\lambda A) = \lambda\Phi(A)$ et par suite $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Soit $A \in Ker\,\Phi$ alors $\Phi(A) = 0$ et par suite pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$ on a $Tr(\Phi(A)\Phi(E_{ij})) = 0$, par conséquent $Tr(AE_{ij}) = 0$, comme la famille $\{E_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $Tr(AM) = 0$ et donc $A = 0$ d'après Préléminaires)2)$b)$. Ainsi $Ker\,\Phi = \{0\}$ et Φ est injective, comme $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, on en déduit d'après le Théorème du rang que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

---

4) Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$ on a $E_{ij}^2 = \delta_{ij}E_{ij} = 0$ et donc E_{ij} est nilpotente d'indice 2. En particulier $\chi_{\Phi(E_{ij})^2} = \chi_{E_{ij}^2} = (-X)^n$ et par suite d'après le théorème de Cayley-Hamilton $\Phi(E_{ij})^{2n} = 0$ et donc $\Phi(E_{ij})$ est nilpotente.

---

5) On a $\Phi(G) = I_n$ et $G = (g_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n,\, i \neq j}$.

$a)$ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{\Phi(A)} = \chi_{\Phi(A)\Phi(G)} = \chi_{AG}$.

$b)$ Pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j$, on a $E_{ij}G = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ g_{j1} & g_{j2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g_{jn} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

et par suite pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j$, on a $\chi_{E_{ij}G} = (-X)^{n-1}(g_{ji} - X)$.

$c)$ Soit $1 \leqslant i, j \leqslant n$ tels que $i \neq j$ D'après 5)$a)$ on sait que $\chi_{E_{ij}G} = \chi_{\Phi(E_{i}j)}$ or d'après 4) on sait également que $\Phi(E_{ij})$ est nilpotente et que par conséquent $\chi_{\Phi(E_{ij})} = (-X)^n$. Ainsi $g_{ji} = 0$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j$, en particulier G est diagonale. Comme G est diagonale on a $\chi_{G^2} = \prod_{i=1}^{n}(g_{ii}^2 - X)$, or d'après 5)$a)$ on a $\chi_{G^2} = \chi_{\Phi(G)} = \chi_{I_n} = (1-X)^n$. Ainsi pour tout $1 \leqslant i \leqslant n,\ g_{ii}^2 = 1$ et donc $G^2 = I_n$.

---

6) Soit $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ définie par $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Psi(A) = \Phi(AG)$.

$a)$ D'après 5)$a)$, on a pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_{\Psi(A)} = \chi_{\Phi(AG)} = \chi_{AG^2} = \chi_A$.

$b)$ D'après Partie I] B] 4) On sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Psi(A) = PAP^{-1}$ ou $\Psi(A) = P^tAP^{-1}$, or $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = \Phi(MG^2) = \Phi(MGG) = \psi(MG)$. Ainsi $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = PMGP^{-1}$ ou $\Phi(M) = P^t(MG)P^{-1} = P^tG^tMP^{-1} = PG^tMP^{-1}$.

---

7) $a)$ Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\chi_{AGBG} = \chi_{\Phi(AG)\Phi(BG)} = \chi_{\Psi(A)\Psi(B)}$, or Ψ conserve le polynôme caractéristique, par conséquent d'après D'après Partie I] B] 4) il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Psi(A) = PAP^{-1}$ ou $\Psi(A) = P^tAP^{-1}$ et par suite $\Psi(A)\Psi(B) = PAP^{-1}PBP^{-1} = \Psi(AB)$ ou $\Psi(A)\Psi(B) = P^tAP^{-1}P^tBP^{-1} = \Psi(BA)$. Ainsi $\chi_{AGBG} = \chi_{\Psi(AB)} = \chi_{AB}$ ou $\chi_{AGBG} = \chi_{\Psi(BA)} = \chi_{BA}$. En particulier Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $Tr(AGBG) = Tr(AB)$ ou $Tr(AGBG) = Tr(BA) = Tr(AB)$.

$b)$ D'après 7)$a)$ on a pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ Tr(AGBG) = Tr(AB)$, par conséquent $Tr(A(B - GBG) = 0$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ce qui entraîne d'après Préliminaires]2)b) que pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ B - GBG = 0$.

$c)$ D'après $b)$ on a $GB = BG$ pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cela implique d'après Préliminaires]1)b) que G est une matrice scalaire, ainsi il existe $\varepsilon \in \mathbb{C}$ tel que $G = \varepsilon I_n$, comme $G^2 = I_n$ (D'après Partie II]5)c)) on en déduit que $\varepsilon^2 = 1$ et donc $\varepsilon = \pm 1$.

---

8) Supposons qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $w = \varepsilon u_{P,P^{-1}}$ avec $\varepsilon = \pm 1$, alors pour tout

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\chi_{w(A)w(B)} = \chi_{(\varepsilon PAP^{-1})(\varepsilon PBP^{-1})} = \chi_{(\varepsilon^2 PABP^{-1})} = \chi_{(PABP^{-1})} = \chi_{AB}.$$

Idem si $w = \varepsilon v_{P,P^{-1}}$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

TROISIÈME PARTIE

1) On sait que toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale (Théorème spectral). Ainsi il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P^{-1}DP = {}^tPDP$. Les coefficients diagonaux de D représentent les valeurs propres de A.

b) Supposons que A soit positive et soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ et par suite

$${}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2 \geqslant 0,$$

en particulier $\lambda \geqslant 0$. Réciproquement, supposons que $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+$, comme $A = PD^tP$, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$${}^tXAX = {}^tX^tPDPX = {}^t(PX)D(PX),$$

en notons $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, comme tous les λ_i sont positifs alors pour tout

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0.$$

c) Supposons que A soit définie positive et soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ et par suite

$${}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2 > 0,$$

en particulier $\lambda > 0$. Réciproquement, supposons que $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, comme $A = PD^tP$, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$${}^tXAX = {}^tX^tPDPX = {}^t(PX)D(PX),$$

en notons $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, comme tous les λ_i sont positifs alors pour tout

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0.$$

---

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A + \mu I_n)$ si et seulement si, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ tel que $(A + \mu I_n)X = \lambda X$ si et seulement si, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ tel que $AX = (\lambda - \mu)X$ si et seulement si $\lambda - \mu \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$. Ainsi $Sp_{\mathbb{R}}(A + \mu I_n) = Sp_{\mathbb{R}}(A) + \mu$.

b) Soit $\alpha = -\min Sp_{\mathbb{R}}(A)$, alors pour tout $x > \alpha$ et pour tout $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$, $x + \lambda > 0$ et par suite $Sp_{\mathbb{R}}(A + xI_n) \subset \mathbb{R}_+^*$, en particulier $A + xI_n$ est définie positive.

---

3) *a*) $I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R}) = \Phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) \subset \Phi(S_n(\mathbb{R}))$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $H = \Phi^{-1}(I_n)$, soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $A + xI_n$ soit définie positive, comme $\Phi(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(M) = A + xI_n$ et par suite $\Phi(M - xH) = \Phi(M) - x\Phi(H) = A$, de plus $M - xH \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ainsi Φ est surjective.

b) $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et Φ est surjective, alors d'après la conséquence du théorème du rang, on en déduit que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

4) *a*) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, ${}^tXA_kX \geqslant 0$ et par suite $\lim\limits_{k\to+\infty} {}^tXA_kX \geqslant 0$, comme l'application $M \longmapsto {}^tXMX$ est linéaire en dimension finie, elle est en particulier continue, et par conséquent ${}^tXAX = \lim\limits_{k\to+\infty} {}^tXA_kX \geqslant 0$ et donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ce qui montre que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $A_k = A + \dfrac{1}{k}I_n$, alors $A_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Phi(A_k)$ aussi, comme Φ est linéaire en dimension finie, on en déduit que Φ est continue, en particulier la suite $(\Phi(A_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\Phi(A)$ et par suite $\Phi(A) \in \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. L'inclusion $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est justifiée par le fait que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé. Ainsi $\Phi(\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Comme Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que Φ^{-1} est une application linéaire en dimension finie et est donc continue, par suite en appliquant le même raisonnement précédent, on en déduit que $\Phi^{-1}(\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $A = \Phi(\Phi^{-1}(A)) \in \Phi(\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$ et par suite $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \subset \Phi(\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$ ce qui fournie $\Phi(\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

---

5) On prend $n = 2$ et on suppose que $\Phi(I_2)$.

$a)$ Si $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ alors A est diagonalisable, comme A possède une seule valeur propre alors A est une homothétie, ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$ et par suite

$\Phi(A) = \Phi(\lambda I_2) = \lambda \Phi(I_2) = \lambda I_2 = A$.

$b)$ $i)$ ${}^t(A - \mu I_2) = A - \mu I_2$ et par suite $A - \mu I_2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. De plus

$Sp_{\mathbb{R}}(A - \mu I_2) = \{0, \lambda - \mu\} \subset \mathbb{R}_+$ et par suite $A - \mu I_2$ est positif. Comme 0 est une valeur propre de $A - \mu I_2$ alors $rg\, A - \mu I_2 \neq 2$, de la même façon comme $\lambda - \mu > 0$ est une valeur propre de $A - \mu I_2$, on en déduit également que $rg\, A - \mu I_2 \neq 0$. Ainsi $rg\, A - \mu I_2 = 1$.

$ii)$ $\Phi(A) - \mu I_2 = \Phi(A) - \mu \Phi(I_2) = \Phi(A - \mu I_2)$, comme $A - \mu I_2 \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ et

$\Phi(\mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ alors $\Phi(A) - \mu I_2 \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$. Par ailleurs Φ est un automorphisme et $A - \mu I_2 \neq 0$ par conséquent $\Phi(A) - \mu I_2 = \Phi(A - \mu I_2) \neq 0$ en particulier $rg\,(\Phi(A) - \mu I_2) \neq 0$. Supposons maintenant que $rg\,(\Phi(A) - \mu I_2) = 2$ alors $\Phi(A) - \mu I_2 \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et par suite $A - \mu I_2 = \Phi^{-1}(\Phi(A) - \mu I_2) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ absurde puisque 0 est une valeur propre de $A - \mu I_2$. Ainsi $rg\,(\Phi(A) - \mu I_2) \neq 2$, en particulier $rg\,(\Phi(A) - \mu I_2) = 1$ et $dim\, Ker\,(\Phi(A) - \mu I_2) = 1$, ce qui signifie que $\mu \in Sp_{\mathbb{R}}(\Phi(A))$.

$iii)$ On a $Sp_{\mathbb{R}}(-A) = \{-\mu, -\lambda\}$ avec $-\mu > -\lambda$. En appliquant $ii)$ à $-\Phi(A) + \lambda I_2$ on en déduit que $\lambda \in \Phi(A)$.

$c)$ D'après ce qui précède on a $Sp_{\mathbb{R}}(\Phi(A)) = Sp_{\mathbb{R}}(A)$, comme $A, \Phi(A) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ elles sont toutes les deux diagonalisables et ont par conséquent le même polynôme caractéristique.