المعهد التحضيري للدراسات الهندسية بالمنار

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs – El Manar

Départ. de Math.	**Examen n°1**	**Matière**: Analyse
Niveau: 1ère MP		**Durée**: 2 H
Date: 02/01/2017		**Nb de pages**:2

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un élément important pour l'appréciation des copies.

Documents, calculatrices et **téléphones portables** non autorisés.

Exercice *Soit* f *la fonction définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^3 + x - 1$.

1. *Etudier la monotonie de* f.
2. *Montrer que* $f(x) \neq 0$*, pour tout* $x \in \mathbb{Q}$ *(Poser* $x = \frac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *et* p, q *premiers entre eux).*
3. *On considère les ensembles* $A = \{a \in \mathbb{Q} : \ f(a) < 0\}$ *et* $B = \{b \in \mathbb{Q} : \ f(b) > 0\}$.
   (a) *Montrer que* $A \cap B = \emptyset$ *et* $A \cup B = \mathbb{Q}$.
   (b) *Montrer que:* $\forall a \in A$ *et* $\forall\ b \in B$, $a < b$.
4. *Montrer que* $\sup A$ *et* $\inf B$ *existent dans* $\mathbb{R}$.
5. *On note* $\alpha = \sup A$ *et* $\beta = \inf B$. *Vérifier que* $0 < \alpha \leq \beta < 1$.
6. *Montrer que* $f(\alpha) \leq 0$ *et* $f(\beta) \geq 0$.
7. *Montrer que* $\alpha = \beta$ *(On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$*).*
8. *En déduire la solution de l'équation* $f(x) = 0$.

Problème (I) Question préliminaire: *Montrer le lemme de Césaro: si une suite* $(u_n)_n$ *converge vers une limite* ℓ *alors la suite* $(v_n)_n$ *de terme général*

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

converge également vers ℓ.

(II) *Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:*

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n. \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
2. *On suppose que $a > 0$.*
   (a) *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. (On pourra raisonner par l'absurde).*
   (b) *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*
   $$0 \leq v_{n+k+1} - v_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_n}).$$
   (c) *En déduire que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*
   $$0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln(1 + \frac{1}{u_n}).$$
   (d) *Vérifier que $(v_n)_n$ est une suite croissante.*
   (e) *Montrer que la suite (v_n) est convergente vers une limite notée ℓ_1 et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
   $$0 \leq \ell_1 - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln(1 + \frac{1}{u_n}).$$
   (f) *Vérifier que*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \exp(2^n \ell_1) \leq u_n + 1.$$
   (g) *En déduire que*
   $$u_n \ \sim\ \exp(2^n \ell_1).$$
3. *On suppose que $a < -1$, montrer qu'on se ramène au cas précédent.*
4. *On suppose que $-1 < a < 0$.*
   (a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-1, 0[$.*
   (b) *En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ_2 qu'on déterminera.*
   (c) *On pose $w_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -1$.*
   (d) *Montrer, en utilisant le lemme de Césaro, que $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = -1$.*
5. *Que peut-on dire des cas $a = 0$ et $a = -1$?*

Bon travail