INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS EL MANAR

Examen n° 1 d'ALGEBRE

Classes: 1 PT et 1 PC — 4 - 1 - 2016

Nombre de pages : 1 — Durée : 2H

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$.

1. Déterminer la somme et le produit des racines de P.
2. Vérifier que i est une racine simple de P et que j est une racine double de P.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

On considère l'équation $(E) : P(2X) = P'(X)P''(X)$, $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Soit P est un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ de degré n et solution de (E). Déterminer les valeurs possibles de n.
2. En déduire tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient l'équation (E).

Exercice 3

On considère les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $A = P^{-1}DP$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$.
4. En déduire l'expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, selon les valeurs du paramètre réel m, le système S suivant
$$S : \begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y - z = 2m \\ mx + y + mz = m \end{cases}$$
2. Pour quelles valeurs du réel m, la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$, est-elle inversible?

Ex 1 (5 points) — Algèbre n°1

1) $S = -\frac{a_5}{a_6} = -2$ $P = (-1)^6 \frac{a_0}{a_6} = 1$ (0,5) + (0,5)

2) $P(i) = 0$ (0,5) $P'(i) \neq 0$ (0,5)

$P(j) = P'(j) = 0$ $P''(j) \neq 0$ (1,5)

3) P a coefficients réels donc

$P = (X-j)^2 (X-\bar{j})^2 (X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$

dans $\mathbb{R}[X]$ $P = (X^2+X+1)^2(X^2+1)$

Ex 2 (4 points)

1) Si P est de degré $n \geq 2$

alors $n-1+n-2 = 3n$ donc $n = 3$ (1)

(les polynômes de degré 0 et de degré 1 ne sont pas des solutions dans les deux cas $P'P'' = 0$)

2) Si P de degré 3 solution alors $(3aX^2+2bX+c)(6aX+2b)$
$= a(2X)^3 + b(2X)^2 + c(2X) + c$

donc $\begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ (2)

$P = 0$ est une solution Par suite $S = \left\{0, \frac{4}{9}X^3\right\}$

Ex 3 (6 points) on utilise la méthode de pivots de gauss

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & +1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & +1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 - L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 + L_3 \\ L_2 - \frac{1}{2}L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

pour trouver P^{-1} on peut résoudre de $PX = Y$

2 $\begin{cases} PX = \\ X = P^{-} \end{cases}$

2) $A = P^{-1} D P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 1

3) pour $n = 0$ l'égalité est vérifiée

Soit $n \geq 0$ tq $A^n = P^{-1} D^n P$ 1

$A^{n+1} = A^n A = P^{-1} D^n P P^{-1} D P = P^{-1} D^{n+1} P$

4) par récurrence on vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}$ $D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$ 1

$$A^n = P^{-1} D^n P = \begin{bmatrix} 3^n & -2^n + 3^n & -2^n + 3^n \\ \frac{1}{2} - \frac{3^n}{2} & \frac{1}{2} + 2^n - \frac{3^n}{2} & -\frac{1}{2} + 2^n - \frac{3^n}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2} \end{bmatrix}$$ 1

Ex 4 (5 points)

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y - z = 2m \end{cases}$$

$L_2 - mL_1$ $L_3 - mL_1$ $\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (1-m^2)y + (-1-m)z = m \\ (1-m^2)y = 0 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (1-m^2)y + (-1-m)z = m \\ (1+m)z = -m \end{cases}$$

Si $m \neq -1$ alors $z = \frac{-m}{1+m}$

si de plus $m \neq 1$ alors $y = 0$ $\left(y = m + \frac{(1+m)(-m)}{1+m} = 0 \right)$

et $x = 1 + \frac{m}{1+m} = \frac{1+2m}{1+m}$ 2

on a donc
Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1+2m}{1+m}, 0, \frac{-m}{1+m} \right) \right\}$

Si $m = 1$ (S) devient $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{2} - y \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{3}{2} - y, y, -\frac{1}{2} \right), y \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) + \text{Vect}\left((-1, 1, 0) \right)$$ 1

Si $m = -1$
(S) devient $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 0z = -1 \end{cases}$ $S = \emptyset$ 1

2) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \iff A_m \underset{(L)}{\sim} (I_3)$

donc
A_m est inversible ssi $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ 1